45 等差数列・等比数列

373

(1)

$$P_n = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_n$$
$$= 2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$$

また，

$a_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$ より，

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{2}(n+1)}{2} \cdot n$$
$$= \frac{n(n+3)}{4}$$

よって， $P_n = 2^{\frac{n(n+3)}{4}}$

したがって, $\frac{n(n+3)}{4} \geq 100$, すなわち, $n(n+3) \geq 400$ を満たす最小の自然数を求めればよく，

その値は， $n = 18$ のとき $18(18+3) = 378 < 400$ ， $n = 19$ のとき $19(19+3) = 418 > 400$ より，19

(2)

$a_n = \frac{1}{2}(n+1)$ より， $b_n = 2^{a_n} = 2^{\frac{1}{2}(n+1)} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^n$

よって， $S_n = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} - \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\left\{\left(\sqrt{2}\right)^n - 1\right\}}{\sqrt{2}-1}$

また，これより $S_2 = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

よって， $\frac{2\left\{\left(\sqrt{2}\right)^n - 1\right\}}{\sqrt{2}-1} \geq 2^{100} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}-1}$ すなわち $\left(\sqrt{2}\right)^n - 1 \geq 2^{100}$ を満たす最小の自然数を求めればよい。

$n = 200$ のとき $\left(\sqrt{2}\right)^{200} - 1 = 2^{100} - 1 < 2^{100}$

$n = 201$ のとき $\left(\sqrt{2}\right)^{201} - 1 = \sqrt{2} \cdot 2^{100} - 1 = 2^{100}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2^{100}}\right) > 2^{100}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) > 2^{100} \cdot 1 = 2^{100}$

よって，求める自然数は 201

補足

等比数列$\{A_n\}$の公比をrとすると，$\{A_n\}$の第i項から第j項までの和は$\dfrac{A_i - A_{j+1}}{1-r}$

374

k, lを1以上の自然数とする。

4で割ると1余る自然数の数列を$\{p_k\}$とすると，$p_k = 1 + 4(k-1) = 4k - 3$ ・・・①

7で割ると2余る自然数の数列を$\{q_l\}$とすると，$q_l = 2 + 7(l-1) = 7l - 5$ ・・・②

$p_k = q_l$とすると，$4k - 3 = 7l - 5$より，$7l - 4k = 2$ ・・・③

また，$7 \cdot (-2) - 4 \cdot (-4) = 2$ ・・・④

③－④より，$7(l+2) - 4(k+4) = 0$ すなわち$7(l+2) = 4(k+4)$

7と4は互いに素だから，$k + 4 = 7n$ （nは自然数）とおくと，$l + 2 = 4n$

よって，$k = 7n - 4$，$l = 4n - 2$

それぞれを①または②に代入することにより，

$p_k = q_l$となる数列の一般項は$28n - 19$で与えられることがわかる。

よって，数列$\{a_n\}$は一般項$a_n = 28n - 19$の1以上200以下の自然数である。

したがって，$1 \le 28n - 19 \le 200$より，$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

よって，項数は7 ・・・(答)

また，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = \dfrac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \dfrac{9 + 177}{2} \cdot 7 = 651$ ・・・(答)

375

(1)

$a_k = p + 2(k-1) = p - 2 + 2k$ より，

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^{n} (p - 2 + 2k) \\
&= (p-2)n + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(p + n - 1)
\end{aligned}
$$

これと条件より，$n(p + n - 1) = n^m$ すなわち、$n(p + n - 1 - n^{m-1}) = 0$

よって，$n \ne 0$より，$p + n - 1 - n^{m-1} = 0$ $\therefore p = n^{m-1} - n + 1$

(2)

解法 1

nが偶数のとき

$p = n^{m-1} - n + 1 \equiv 0^{m-1} - 0 + 1 \equiv 1 \pmod 2$

nが奇数のとき

$p = n^{m-1} - n + 1 \equiv 1^{m-1} - 1 + 1 \equiv 1 \pmod 2$

よって，pは奇数である。

解法 2

$$
\begin{aligned}
p &= n^{m-1} - n + 1 \\
&= n\left(n^{m-2} - 1\right) + 1 \\
&= n(n-1)\left(n^{m-3} + n^{m-4} + \cdots + 1\right) + 1
\end{aligned}
$$

$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数の積だから，偶数である。

よって，$n(n-1)\left(n^{m-3} + n^{m-4} + \cdots + 1\right)$ は偶数である。

ゆえに，$n(n-1)\left(n^{m-3} + n^{m-4} + \cdots + 1\right) + 1$，すなわち p は奇数である。

376

(1)

$\{a_n\}$ を初項 $a_1 = a$，公差 d の等差数列とすると，$a_n = a + (n-1)d$ より，

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\
&= \frac{\dfrac{a + \{a + (n-1)d\}}{2} \cdot n}{n} \\
&= a + (n-1) \cdot \frac{d}{2}
\end{aligned}
$$

よって，$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a$，公差 $\dfrac{d}{2}$ の等差数列である。

ゆえに，題意が成り立つ。

(2)

$\{b_n\}$ を初項 $b_1 = b$，公差 e の等差数列とすると，$b_n = b + (n-1)e$

また，$b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ より，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nb_n$

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 1 \cdot b_1$ より，$a_1 = b$

(ii) $n \geq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= nb_n - (n-1)b_{n-1} \\
&= n\{b + (n-1)e\} - (n-1)\{b + (n-2)e\} \\
&= b + (n-1) \cdot 2e
\end{aligned}
$$

これに $n = 1$ を代入すると，$a_1 = b$

したがって，(i)より，$n = 1$ のときも $a_n = b + (n-1) \cdot 2e$ が成り立つ。

よって，$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = b$，公差 $2e$ の等差数列である。

ゆえに，題意が成り立つ。

377

(1)

$\{a_n\}$の一般項は，$a_n = a + (n-1)d$

これより，$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$　・・・①

また，$n \leq 34$ のとき $S_n \leq 0$，$n \geq 35$ のとき $S_n > 0$ より，$\{a_n\}$は単調に増加する。

よって，$d > 0$

したがって，$a_n = a + (n-1)d \leq 0$ を満たす最大の自然数 n の値を求めればよい。

$a + (n-1)d \leq 0$ より，$d\left(n - 1 + \dfrac{a}{d}\right) \leq 0$

これと $d > 0$ より，$n - 1 + \dfrac{a}{d} \leq 0$　すなわち　$n \leq 1 - \dfrac{a}{d}$　・・・②

$n \leq 34$ のとき $S_n \leq 0$ より $S_{34} \leq 0$，$n \geq 35$ のとき $S_n > 0$ より $S_{35} > 0$

これと①より，$S_{34} = 17(2a + 33d) \leq 0$，$S_{35} = 35(a + 17d) > 0$

よって，$2a + 33d \leq 0$　すなわち $2d\left(\dfrac{a}{d} + \dfrac{33}{2}\right) \leq 0$

これと $d > 0$ より，$\dfrac{33}{2} \leq -\dfrac{a}{d}$　$\therefore 1 + \dfrac{33}{2} \leq 1 - \dfrac{a}{d}$　・・・③

$a + 17d > 0$　すなわち $d\left(\dfrac{a}{d} + 17\right) > 0$

同様にして，$1 - \dfrac{a}{d} < 18$　・・・④

②～④より，$1 + \dfrac{33}{2} \leq n < 18$

これを満たす自然数 n は 17

よって，S_n が最小となる自然数 n の値は 17

(2)

$S_{17} = 17(a + 8d) = -289$ より，$a + 8d = -17$　・・・⑤

⑤より，$-\dfrac{a}{d} = 8 + \dfrac{17}{d}$　また，③，④より，$\dfrac{33}{2} \leq -\dfrac{a}{d} < 17$

よって，$\dfrac{33}{2} \leq 8 + \dfrac{17}{d} < 17$　すなわち $\dfrac{17}{2} \leq \dfrac{17}{d} < 9$

逆数をとると，$\dfrac{1}{9} < \dfrac{d}{17} \leq \dfrac{2}{17}$　$\therefore \dfrac{17}{9} < d \leq 2$

d は整数だから，$d = 2$　・・・(答)

これを⑤に代入し，a の値を求めると，$a = -33$　・・・(答)

378

解法 1

数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の一般項は，それぞれ$a_n=2+3(n-1)=3n-1$，$b_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$

そこで，$a_k=b_l$（$k,\ l$は正の整数）を満たすkまたはlについて考える。

$3k-1=-(-2)^l$ より，

$3k=1-(-2)^l$

$\quad=1-(-1)^l 2^l$

これと$3k>0$ より，lは奇数であることが必要である。

そこで，$l=2m-1$（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおくと，

$3k=1-(-1)^{2m-1}2^{2m-1}$

$\quad=1+2^{2m-1}$

$\quad=1+2^{2(m-1)+1}$

$\quad=1+2\cdot4^{m-1}$

$1+2\cdot4^{m-1}\equiv1+2\cdot1^{m-1}\equiv1+2\equiv0\ (\mathrm{mod}\,3)$

よって，$1+2\cdot4^{m-1}$は 3 の倍数である。

したがって，$l=2m-1$（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）のとき$a_k=b_l$を満たす正の整数kが存在する。

すなわち$a_k=b_{2m-1}$（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が成り立つ。

ゆえに，mをnに置き換えることにより，$c_n=b_{2n-1}=-(-2)^{2n-1}=-(-2)^{2(n-1)+1}=2\cdot4^{n-1}$

解法 2

$a_n=2+3(n-1)=3n-1$

$b_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$

より，$a_k=b_l$（$k,\ l$は正の整数）とすると，

$b_l=3k-1$ より，

$b_{l+1}=-2b_l=-2(3k-1)<0$

ところが$a_n=3n-1>0$

よって，b_{l+1}と等しい$\{a_n\}$の項は存在しない。

$b_{l+2}=-2b_{l+1}=4(3k-1)=3(4k-1)-1=a_{4k-1}\ (\because 4k-1>0)$

よって，$a_k=b_l$のとき$a_{4k-1}=b_{l+2}$

また，$a_1=b_1=2$

よって，$b_1,\ b_3,\ b_5,\ \cdots,\ b_{2n-1}$は$a_n$に含まれる。

ゆえに，$c_n=b_{2n-1}=2\cdot4^{n-1}$

379

解法 1：余弦定理

△ABC が与えられた条件を満たし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a， b， c

∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A， B， C とする。

また，最大角を∠A，最小角を∠C とする。

条件(i)より， $A-C=90°$

これと $A+B+C=180°$ より，

$A=90°+C$ ・・・① $B=90°-2C$ ・・・②

∠A は鈍角だから，∠B と∠C は鋭角である。

これと条件(ii)より，辺の長さの関係は， $c<b<a$

よって，公差を $d\ (>0)$ とすると， $c=b-d$， $a=b+d$

これと条件(iii)より， $a+b+c=3b=3$ $\therefore b=1$ ・・・③

ゆえに， $a=1+d$ ・・・④ $c=1-d$ ・・・⑤

ただし， $0<d<1$

余弦定理と①～⑤より，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1+(1-d)^2-(1+d)^2}{2\cdot1\cdot(1-d)}=\frac{-4d+1}{2(1-d)}$$

$\cos A=-\sin C$ だから， $\sin C=\dfrac{4d-1}{2(1-d)}$ ・・・⑥

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(1+d)^2+1^2-(1-d)^2}{2(1+d)\cdot1}=\frac{4d+1}{2(1+d)}\quad\cdots⑦$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(1+d)^2+(1-d)^2-1}{2(1+d)(1-d)}=\frac{1+2d^2}{2(1+d)(1-d)}$$

$\cos B=\sin 2C=2\sin C\cos C$ だから， $\sin C\cos C=\dfrac{1+2d^2}{4(1+d)(1-d)}$ ・・・⑧

⑥～⑧より， $\dfrac{4d-1}{2(1-d)}\cdot\dfrac{4d+1}{2(1+d)}=\dfrac{1+2d^2}{4(1+d)(1-d)}$

両辺を整理すると， $\dfrac{7d^2-1}{2(1+d)(1-d)}=0$ より， $7d^2=1$

これと $0<d<1$ より， $d=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

よって，③～⑤より， $a=1+\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， $b=1$， $c=1-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

ゆえに，求める 3 辺の長さは $1-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，1， $1+\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

解法 2：正弦定理

△ABC が与えられた条件を満たし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c

∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とする。

また，最大角を∠A，最小角を∠C とする。

条件(i)より，$A-C=90°$

これと $A+B+C=180°$ より，

$A=90°+C$ 　・・・① 　$B=90°-2C$ 　・・・②

∠A は鈍角だから，∠B と∠C は鋭角である。

これと条件(ii)より，辺の長さの関係は，$c<b<a$

よって，公差を $d\ (>0)$ とすると，$c=b-d$，$a=b+d$

これと条件(iii)より，$a+b+c=3b=3$ 　$\therefore b=1$ 　・・・③

ゆえに，$a=1+d$ 　・・・④ 　$c=1-d$ 　・・・⑤

ただし，$0<d<1$

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

これと①～⑤より，$\dfrac{1+d}{\sin(90°+C)}=\dfrac{1}{\sin(90°-2C)}=\dfrac{1-d}{\sin C}$

すなわち，$\dfrac{1+d}{\cos C}=\dfrac{1}{\cos 2C}=\dfrac{1-d}{\sin C}$

よって，$\begin{cases}\dfrac{1+d}{\cos C}=\dfrac{1-d}{\sin C}\\[2mm] \dfrac{1}{\cos 2C}=\dfrac{1-d}{\sin C}\end{cases}$

$\dfrac{1+d}{\cos C}=\dfrac{1-d}{\sin C}$ について，

両辺に $(1+d)\sin C$ を掛けることにより，$\tan C=\dfrac{1-d}{1+d}$

これと $0<C<90°$ より，

$$\cos C=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 C}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1-d}{1+d}\right)^2}}$$
$$=\frac{1+d}{\sqrt{2(1+d^2)}} \quad ・・・⑥$$

$\sin C = \tan C \cdot \cos C$

$= \dfrac{1-d}{\sqrt{2(1+d^2)}}$ ・・・⑦

$\dfrac{1}{\cos 2C} = \dfrac{1-d}{\sin C}$ について，

両辺に $\cos 2C \cdot \sin C$ を掛けることにより， $\sin C = (1-d)\cos 2C$

よって， $\sin C = (1-d)(\cos^2 C - \sin^2 C)$

これに⑥，⑦を代入すると，

$\dfrac{1-d}{\sqrt{2(1+d^2)}} = (1-d)\left\{\dfrac{(1+d)^2}{2(1+d^2)} - \dfrac{(1-d)^2}{2(1+d^2)}\right\}$ より， $\dfrac{1-d}{\sqrt{2(1+d^2)}} = (1-d)\cdot\dfrac{2d}{1+d^2}$

$1-d \neq 0$ であるから， $\dfrac{1}{\sqrt{2(1+d^2)}} = \dfrac{2d}{1+d^2}$

両辺に $2(1+d^2)$ を掛けると， $\sqrt{2(1+d^2)} = 4d$

両辺を 2 乗すると， $2(1+d^2) = 16d^2$

両辺を整理すると， $2(7d^2-1) = 0$

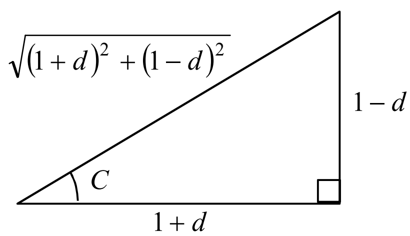
よって， $7d^2 = 1$

$0 < d < 1$ だから， $d = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

これと③～⑤より， $a = 1+\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， $b = 1$， $c = 1-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

ゆえに，求める 3 辺の長さは $1-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， 1， $1+\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

補足： $\sin C$ と $\cos C$ は $\tan C = \dfrac{1-d}{1+d}$ と三角比を使って予め求めておくとよい



上図より， $\sin C = \dfrac{1-d}{\sqrt{(1+d)^2+(1-d)^2}} = \dfrac{1-d}{\sqrt{2(1+d^2)}}$， $\cos C = \dfrac{1+d}{\sqrt{2(1+d^2)}}$

380

(1)

解法 1

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$が初項$f(0)=m$, 公差lの等差数列のとき,

$f(k)=lk+m\ (k=0,1,2,3,4)$より, $f(k)-lk-m=0\ (k=0,1,2,3,4)$

ここで, $g(x)=f(x)-lx-m$とおくと, $g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

よって, $g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

これと$f(x)-lx-m$の最高次の項の係数が 1 であることから$a=1$

よって, $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=f(x)-lx-m$

ゆえに, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$

逆に, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$ならば

$f(0)=m$, $f(1)=l+m$, $f(2)=2l+m$, $f(3)=3l+m$, $f(4)=4l+m$より,

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$は初項$f(0)=m$, 公差lの等差数列である。

以上より, 題意が成り立つ。

解法 2

$f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$を$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$で割った余りを$r(x)$とおくと,

$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+r(x)$

よって, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$が初項$f(0)=m$, 公差lの等差数列ならば

$r(0)$, $r(1)$, $r(2)$, $r(3)$, $r(4)$も初項$f(0)=m$, 公差lの等差数列である。

ゆえに, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$

逆に, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$ならば

$f(0)=m$, $f(1)=l+m$, $f(2)=2l+m$, $f(3)=3l+m$, $f(4)=4l+m$より,

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$は初項$f(0)=m$, 公差lの等差数列である。

以上より, 題意が成り立つ。

(2)

kの最小値は 3 だから, $f(\alpha)$, $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$が等差数列となること,

すなわち, $2f(\alpha+1)=f(\alpha)+f(\alpha+2)$が成り立つことが必要である。

$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$より,

$$\begin{aligned}2f(\alpha+1)&=2\{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+l(\alpha+1)+m\}\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha-6)+2l(\alpha+1)+2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\alpha+2)&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)+l\alpha+m+(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+l(\alpha+2)+m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\{(\alpha-3)(\alpha-4)+(\alpha+2)(\alpha+1)\}+2l(\alpha+1)+2m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha+14)+2l(\alpha+1)+2m\end{aligned}$$

よって, $2f(\alpha+1)-\{f(\alpha)+f(\alpha+2)\}=0$より, $20\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

ゆえに, 必要条件は$\alpha=0,1,2$

また,
$f(0)=m$， $f(1)=l+m$， $f(2)=2l+m$， $f(3)=3l+m$， $f(4)=4l+m$， $f(5)=120+5l+m$
より，等差数列であるのは，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$
よって,
(i) $\alpha=0$ のとき
$\alpha+k-1=k-1\leq 4$ および $3\leq k$ より，$k=3,\ 4,\ 5$
(ii) $\alpha=1$ のとき
$\alpha+k-1=k\leq 4$ および $3\leq k$ より，$k=3,\ 4$
(iii) $\alpha=2$ のとき
$\alpha+k-1=k+1\leq 4$ および $3\leq k$ より，$k=3$
以上より,
$(\alpha,\ k)=(0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$